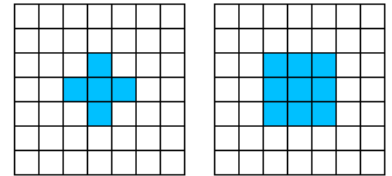


12. Local Operations

Nachbarschaften

Eine Nachbarschaft bezeichnet eine kleine, definierte Bildregion um einen Pixel. Bildverarbeitungsoperationen betrachten Pixel innerhalb einer Nachbarschaft, um für ihren Mittelpunkt einen neuen Farb- oder Grauwert zu berechnen. Mit der Vierer-Nachbarschaft und der Achter-Nachbarschaft existieren zwei grundlegende Nachbarschaftskonzepte. Bei der **Vierer-Nachbarschaft** hat jedes Pixel P eines Bildes zwei horizontale und zwei vertikale Nachbarn. Nimmt man die Koordinaten von P mit (u,v) an, so sind die Koordinaten der vier D-Nachbarn durch $(u-1,v)$, $(u+1,v)$, $(u, v-1)$, $(u,v+1)$ gegeben. Eine Vierer-Nachbarschaft besteht also aus fünf Punkten. Neben den vier D-Nachbarn hat jedes Pixel P eines Bildes auch vier diagonale Nachbarn N . Diese sind durch die Koordinaten $(u-1,v-1)$, $(u+1,v+1)$, $(u-1,v+1)$, $(u+1,v-1)$ gegeben. Der Abstand der Nachbarn N von P wird durch die benutzte Metrik festgelegt. Legt man beispielsweise die *Euklidische Metrik* zugrunde, so beträgt der Abstand $\sqrt{2}$, während er bei der *Manhattan-Metrik* 2 beträgt. Die Menge, die den Punkt P und seine Nachbarn D und N enthält, heißt **Achter-Nachbarschaft**. Eine Achter-Nachbarschaft besteht aus neun Punkten.



Was sind lokale Operationen?

Die wesentliche Eigenschaft von Punktoperationen ist, dass der neue Wert eines Bildelements ausschließlich vom ursprünglichen Bildwert an derselben Position abhängig ist. Lokale Operationen sind Punktoperationen dahingehend ähnlich, dass auch hier eine 1:1-Abbildung der Bildkoordinaten besteht, d. h., dass sich die Geometrie des Bildes nicht ändert. Lokale Operationen werden auch Filteroperationen (kurz: Filter) genannt. Filter unterscheiden sich von Punktoperationen vor allem dadurch, dass das Ergebnis nicht aus einem einzigen Ursprungspixel berechnet wird, sondern aus mehreren Pixeln des Originalbildes. Die Koordinaten der Quellpixel sind bezüglich der aktuellen Position (u,v) definiert und bilden eine zusammenhängende Region. Die Größe der Filterregion bestimmt, wie viele ursprüngliche Pixel zur Berechnung des neuen Pixelwerts beitragen und somit das räumliche Ausmaß des Filters. Eine übliche Größe für Filter ist zum Beispiel 3×3 , die in Achter-Nachbarschaft über der aktuellen Koordinate (u,v) zentriert ist. Die Form der Filterregion muss nicht quadratisch sein, sondern kann beliebige Formen annehmen.

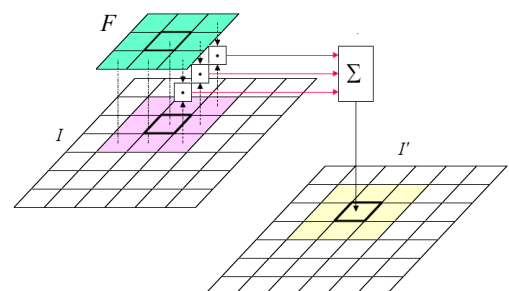
Lineare Filter

Lineare Filter werden deshalb so bezeichnet, weil sie die Pixelwerte innerhalb der Filterregion in linearer Form, d. h. durch eine gewichtete Summation verknüpfen. Ein einfaches Beispiel dazu ist die lokale Mittelwertbildung, bei der alle neun Pixel der 3×3 -Filterregion mit der Gewichtung $1/9$ summiert werden.

$$I'(u,v) = \frac{1}{9} \sum_{j=-1}^1 \sum_{i=-1}^1 I(u+i, v+j)$$

Mit dem gleichen Mechanismus kann, nur durch Änderung der einzelnen Gewichte, eine Vielzahl verschiedener Filter mit unterschiedlichstem Verhalten definiert werden. Bei linearen Filtern werden die Größe und Form der Filterregion, wie auch die zugehörigen Gewichte, durch eine Matrix von Filterkoeffizienten spezifiziert, der so genannten "Filtermatrix" oder "Filtermaske" $F(i,j)$. Die Größe der Matrix entspricht der Größe der Filterregion und jedes Element in der Matrix $F(i,j)$ definiert das Gewicht, mit dem das entsprechende Pixel zu berücksichtigen ist. Bei einem linearen Filter ist das Ergebnis eindeutig und vollständig durch die Koeffizienten in der Filtermatrix bestimmt. Die eigentliche Anwendung auf ein Bild ist – wie in der Abbildung gezeigt – ein einfacher Vorgang: An jeder Bildposition (u,v) werden folgende Schritte ausgeführt:

1. Die Filterfunktion F wird über dem ursprünglichen Bild I positioniert, sodass ihr Koordinatenursprung $F(0,0)$ auf das aktuelle Bildelement $I(u,v)$ fällt.
2. Als Nächstes werden alle Bildelemente mit dem jeweils darüber liegenden Filterkoeffizienten multipliziert und die Ergebnisse summiert.
3. Die resultierende Summe wird an der entsprechenden Position im Ergebnisbild $I'(u,v)$ gespeichert.



Somit werden alle Pixel für den zuvor beschriebenen 3x3 Filter des neuen Bilds $I'(u,v)$ wie folgt berechnet:

$$I'(u,v) = \sum_{j=-1}^1 \sum_{i=-1}^1 I(u+i, v+j) \cdot F(i,j)$$

Tiefpassfilter

Im Allgemeinen werden Tiefpass- und Hochpassfilter unterschieden. **Tiefpassfilter** sind solche, die hohe Frequenzen herausfiltern und niedrige Frequenzen passieren lassen. Sie eignen sich deshalb für die Rauschunterdrückung bzw. als Glättungsoperatoren. Umgekehrt filtern **Hochpassfilter** tiefe Frequenzen heraus und lassen hohe Frequenzen passieren. Sie eignen sich somit beispielsweise für die Detektion von Kanten. Bekannte Tiefpassfilter sind Mittelwertfilter und Gauß-Filter. Die Filtermaske des **Mittelwertfilters** haben wir schon zu Beginn des Abschnitts kennengelernt. Diese einfachste Form aller Tiefpassfilter wird auch Box-Filter genannt. Er ist aber aufgrund seiner scharf abfallenden Ränder und dem damit zusammenhängenden Frequenzverhalten nicht optimal, da allen Bildelementen das gleiche Gewicht zugeordnet wird und nicht das Zentrum gegenüber den Rändern stärker gewichtet ist. Diesen Nachteil hat der **Gauß-Filter** nicht, die Filtermatrix dieses Tiefpassfilters entspricht einer diskreten, zweidimensionalen Gauß-Funktion:

$$G_{\sigma}(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

wobei die Standardabweichung σ den "Radius" der glockenförmigen Funktion definiert.

Das mittlere Bildelement erhält das maximale Gewicht, die Werte der übrigen Koeffizienten nehmen mit steigender Entfernung zur Mitte kontinuierlich und in alle Richtungen gleichförmig (isotrop) ab. Um als Beispiel eine 3 x 3 Filtermaske zu erhalten, müssen für x und y Werte aus $\{-1,0,1\}$ eingesetzt werden. Da die Helligkeit des Bildes nicht verändert werden sollte, muss die Summe aller Koeffizienten 1 ergeben, was dadurch erreicht wird, dass alle

Koeffizienten durch deren Summe dividiert werden. Für einen 3 x 3 Gauß-Filter mit $\sigma=0.5$ erhält man somit den links abgebildeten Filterkern $F_{Gau\beta}$. Es gilt zu beachten, dass bei einem Gauß-Filter eine größere Filtermaske zwar eine bessere Approximation der Gauß-Funktion, jedoch kein tatsächlich unterschiedliches Glättungsverhalten bewirkt. Die Stärke der Glättung kann mit der

Standardabweichung σ variiert werden. Des Weiteren ist anzumerken, dass ein Mittelwertfilter mit einer 3 x 3 Filtermaske noch zu einem befriedigenden Ergebnis führt, im Allgemeinen jedoch der Gauß-Filter vorzuziehen ist.

$$F_{Gau\beta} = \begin{pmatrix} 0.011 & 0.084 & 0.011 \\ 0.084 & 0.619 & 0.084 \\ 0.011 & 0.084 & 0.011 \end{pmatrix}$$

Differenzfilter

Wenn einzelne Filterkoeffizienten negativ sind, kann man die Filteroperation als Differenz von zwei Summen interpretieren: die gewichtete Summe aller Bildelemente mit zugehörigen positiven Koeffizienten abzüglich der gewichteten Summe von Bildelementen mit negativen Koeffizienten innerhalb der Filterregion R. Der **Laplace-Filter** $F_{Laplace}$ bildet z. B. die Differenz zwischen einem zentralen Bildwert (-4) und der Summe über 4 umliegende Bildwerte in Vierernachbarschaft. Daher haben die übrigen 4 Bildwerte Koeffizienten mit dem Wert null und bleiben daher unberücksichtigt.

$$F_{Laplace} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Während bei einer Durchschnittsbildung örtliche Intensitätsunterschiede geglättet werden, erzeugt eine Differenzbildung das Gegenteil: Örtliche Unterschiede werden verstärkt. Wichtige Einsatzbereiche von Differenzfiltern sind daher vor allem das Verstärken von Kanten und Konturen sowie das Schärfen von Bildern. Differenzfilter sind somit **Hochpassfilter**. Hochpassfilter basieren auf der ersten oder zweiten Ableitung der Bildfunktion $g(x,y)$ in unterschiedlicher Richtung mit unterschiedlicher Gewichtung der einzelnen Bildpunkte. Filter, die auf der ersten Ableitung beruhen, werden auch **Gradientenfilter** genannt, die der zweiten Ableitung Laplace-Filter. Das Ergebnisbild enthält nach der Filterung in der Regel positive und negative Grauwerte. Es muss anschließend durch eine Punktoperation auf ein positives Grauwertintervall, beispielsweise auf das Intervall $[0 \dots 255]$ normiert werden, oder es wird der Betrag $|g(x,y)|$ gebildet.

In Adobe Photoshop sind u. a. lineare Filter unter der Bezeichnung "Custom Filter" in dieser Form realisiert. Auch hier werden Filter mit ganzzahligen Koeffizienten und einem gemeinsamen Skalierungsfaktor *Scale* spezifiziert. Zusätzlich kann ein konstanter *Offset*-Wert angegeben werden, etwa um negative Ergebnisse (aufgrund negativer Koeffizienten) in den sichtbaren Intensitätsbereich zu verschieben.

Bildrandproblem

Bei der Berechnung von Filtern gibt es immer Probleme an den Bildrändern. Wann immer die Filterregion so positioniert ist, dass zumindest einer der Filterkoeffizienten außerhalb des Bildbereichs zu liegen kommt und damit

kein zugehöriges Bildpixel hat, kann das entsprechende Filterergebnis nicht berechnet werden. Es gibt zwar keine mathematisch korrekte Lösung für diese Problem, aber einige Methoden für den Umgang mit den Randbereichen:

1. Anstatt der Filterergebnisse im Randbereich einen konstanten Wert (z.B. 0 bzw. "schwarz") einsetzen.
2. Die ursprünglichen (ungefilterten) Bildwerte beibehalten.
3. Auch die Randbereiche berechnen unter der Annahme, dass:
 - a) die Pixel außerhalb des Bilds einen konstanten Wert (z.B. "schwarz" oder "grau") aufweisen.
 - b) sich die Randpixel außerhalb des Bilds fortsetzen.
 - c) sich das Bild in beiden Richtungen (horizontal und vertikal) zyklisch wiederholt.

Keine der Methoden ist perfekt und die Wahl hängt von der Art des Filters und der Anwendung ab. Methode (1) ist zwar die einfachste, aber nicht akzeptabel, weil sich der sichtbare Bildbereich durch die Filteroperation verkleinert. Das gilt grundsätzlich auch für Methode (2). Methode (3a) kann bei größeren Filtern die Ergebnisse zu den Rändern hin stark verändern. Demgegenüber verursacht Methode (3b) relativ geringe Verfälschungen und wird daher bevorzugt.

Formale Eigenschaften linearer Filter

Die Bedeutung der linearen Filter werden erst deutlich, wenn man das darunter liegende theoretische Fundament betrachtet. Lineare Filter sind keine Erfindung der digitalen Bildverarbeitung, sondern stammen aus der Mathematik. Die Operation heißt **lineare Faltung** (engl. *linear convolution*) und verknüpft zwei Funktionen gleicher Dimensionalität, kontinuierlich oder diskret. Für diskrete, zweidimensionale Funktionen I und F ist die Faltungsoperation definiert als:

$$I'(u, v) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} I(u-i, v-j) \cdot F(i, j)$$

oder abgekürzt $I' = I * F$.

Dies ist ähnlich der ursprünglichen Definition im Abschnitt "Lineare Filter", mit Ausnahme der unterschiedlichen Wertebereiche für die Summenvariablen i, j und der umgekehrten Vorzeichen der Koordinaten in $I(u-i, v-j)$. Da die Filterkoeffizienten außerhalb der Filtermatrix $F(i, j)$ als null angenommen werden, sind die Positionen außerhalb der Matrix für die Summation nicht relevant. Bezüglich der Koordinaten sehen wir durch eine kleine Umformung, dass gilt:

$$I'(u, v) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} I(u+i, v+j) \cdot F(-i, -j)$$

Das wiederum ist der ursprüngliche lineare Filter, außer, dass die Filterfunktion $F(-i, -j)$ horizontal und vertikal gespiegelt (bzw. um 180° gedreht) ist. Um genau zu sein, beschreibt die ursprüngliche Operation eigentlich eine lineare Korrelation (*correlation*), was aber identisch ist zur linearen Faltung (*convolution*), abgesehen von der gespiegelten Filtermatrix. Die mathematische Operation hinter allen linearen Filtern ist also die lineare Faltung (*) und das Ergebnis ist vollständig und ausschließlich durch den Faltungskern (die Filtermatrix) F definiert. Daher beschreibt man die Faltung auch als "Black Box"-Operation. Die Eigenschaften der linearen Faltung sind:

1. Die lineare Faltungsoperation ist **kommutativ**, d.h. $I * F = F * I$, man erhält also dasselbe Ergebnis, wenn man das Bild und die Filterfunktion vertauscht. Es macht daher keinen Unterschied, ob wir das Bild I mit dem Filterkern F falten oder umgekehrt.
2. Lineare Filter tragen diese Bezeichnung aufgrund der **Linearitätseigenschaften** der Faltung. Wenn wir z. B. ein Bild mit einer skalaren Konstante a multiplizieren, dann multipliziert sich auch das Faltungsergebnis mit demselben Faktor, d. h. $(a \cdot I) * F = I * (a \cdot F) = a \cdot (I * F)$. Des Weiteren, wenn zwei Bilder pixelweise addiert und nachfolgend die Summe einem Filter unterzogen wird, dann ist das dasselbe als wenn beide Bilder vorher getrennt gefiltert werden und die Addition danach erfolgt: $(I_1 + I_2) * F = (I_1 * F) + (I_2 * F)$.
3. Die lineare Faltung ist **assoziativ**, d. h. die Reihenfolge von nacheinander ausgeführten Filteroperationen ist ohne Belang: $A * (B * C) = (A * B) * C$. Man kann daher bei mehreren aufeinander folgenden Filtern die Reihenfolge beliebig verändern und auch mehrere Filter beliebig zu neuen Filtern zusammenfassen.

Eine unmittelbare Konsequenz aus Eigenschaft 3 ist die Möglichkeit, einen Filterkern F als Faltungsprodukt von zwei oder mehreren (möglicherweise kleineren) Faltungskernen $F_1, F_2, \dots, F_n$ zu beschreiben, sodass $F = F_1 * F_2 * \dots * F_n$. Dies wird **Separierbarkeit** genannt. In diesem Fall kann die Filteroperation $I * F$, mit einem "großen" Filter F , als Folge "kleinerer" Filteroperationen durchgeführt werden, was erheblich weniger Rechenaufwand erfordert.

Die Möglichkeit, einen zweidimensionalen Filter F in zwei eindimensionale Filter F_x und F_y zu zerteilen, ist eine wichtige Form der Separierbarkeit. Angenommen, wir hätten zwei eindimensionale Filter F_x und F_y mit

$$F_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wenn wir diese beiden Filter nacheinander auf das Bild I anwenden, dann ist das gleichbedeutend mit der Anwendung eines kombinierten Filters F_{xy} , wobei:

$$F_{xy} = F_x * F_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad 47$$

